

§2.3 开集、闭集、完备集

Def. 若 E 中所有点都是 E 的内点, 则 E 为开集.

例1 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^n$ 都是开集

Rem. E 是开集 $\Leftrightarrow E \cap (\partial E) = \emptyset$

Def. 若 E 包含 E 的所有聚点, 则 E 为闭集.

Rem. E 是闭集 $\Leftrightarrow E' \subset E \Leftrightarrow E = \bar{E} \Leftrightarrow \partial E \subset E$

例2 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^n$ 都是闭集

(2) 离散集是闭的

Cor. E 是开的 $\Leftrightarrow E^c$ 是闭的.

例3 Cantor 集是闭的

Thm. E' , $\bar{E}$, ∂E 都是闭集

Pf. 由 $(E')' \subset E'$, $\partial(\partial E) \subset \partial E$, E' , ∂E 都是闭的.

$E \cup (E^c)^\circ = \mathbb{R}^n$, 由 $(E^c)^\circ$ 开, $\bar{E}$ 是闭的.

Thm. (1) 有限闭的并是闭的 (2) 可列闭的交是闭的.

Pf. (1) 由 $(A \cup B)' = A' \cup B' \subseteq A \cup B$

$(\bigcup_{k=1}^N A_k)' \subseteq \bigcup_{k=1}^N A_k$, 于是 $\bigcup_{k=1}^N A_k$ 是闭的.

(2) $(\bigcap_{k=1}^\infty A_k)' \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty A_k' \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty A_k$ ($\bigcap_{k=1}^\infty A_k \subseteq A_k$)

Thm. (1) 有限开的交是开的 (2) 可列开的闭是开的.

Pf. (1) $(\bigcap_{k=1}^N A_k)^c = \bigcup_{k=1}^N A_k^c$, $\bigcap_{k=1}^N A_k$ 是开的

(2) $(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)^c = \bigcap_{k=1}^\infty A_k^c$, $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ 是闭的.

Def. 若 E 可表示为一列闭集的并, 则 E 称为 F_σ 集

若 E 可表示为一列开集的交, 则 E 称为 G_δ 集

Cor. F_σ^c 是 G_δ 集, G_δ^c 是 F_σ 集

F_σ , G_δ 都是 Borel 集

Thm. 有界闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖存在有限子覆盖

Def. 若 $E \subset E'$, 则 E 称为自密集

若 $E = E'$, 则 E 称为完备集

Cor. 自密集没有孤立点, 完备集是没有孤立点的闭集

Prop. Cantor 集是非空完备集

Pf. 显然 C 非空, 下证完备:

$\forall x \in C$, x 在 J_1 中, J_1 满足 $|J_1| = \frac{1}{3}$, J_1 是闭的

x 在 J_2 中, J_2 满足 $|J_2| = \frac{1}{3^2}$ 且 $J_2 \subseteq J_1$, 是闭的.

以此类推, $J_1, J_2, \dots$ 构成一闭区间套,

记 $J_k = [a_k, b_k]$, 则 $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$, $x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$

于是 $x \in C'$, 即 C 是完备的.

Prop. Cantor 集是疏朗集

Pf. 只需证 C 中不包含任何区间 (由 $C = C'$ 可知 C 是闭的)

假设 $\exists (a, b) \subseteq C$, $|b-a| > 0$, 则 $(a, b) \subseteq J_1$, $|J_1| = \frac{1}{3}$ 且是闭的.

由上类似有, $(a, b) \subseteq J_2 \subseteq J_1$

以此类推 $|b-a| \leq \frac{1}{3^k} \rightarrow 0$, 与 $|b-a| > 0$ 矛盾

于是 C 是疏朗的

Prop. $\overline{C} = C$

Pf. 由二进制小数可知

例4. 把 $(1, 2]$ 写成 F_σ 集, G_δ 集.

$$(1, 2] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1 + \frac{1}{n}, 2] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (1, 2 + \frac{1}{n})$$